



Estratégia
Militares

RESOLUÇÃO PROVA

● ● ●

MATEMÁTICA

ITA 2021



Prof. Victor So

Sumário

RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA

3



RESOLUÇÃO DA PROVA DE MATEMÁTICA

Notações

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$: o conjunto dos números naturais.

$\mathbb{R}$: o conjunto dos números reais.

$\mathbb{C}$: o conjunto dos números complexos.

i : unidade imaginária, $i^2 = -1$.

$\overline{AB}$: segmento de reta de extremidades nos pontos A e B .

$\widehat{AOB}$: ângulo formado pelos segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$, com vértice no ponto O .

$m(\overline{AB})$: medida do segmento $\overline{AB}$.

Observação: Os sistemas de coordenadas considerados são os cartesianos retangulares.

41. (ITA/2021)

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem ímpar. Suponha que A é simétrica e que B é antissimétrica. Considere as seguintes afirmações:

I. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

II. A comuta com qualquer matriz simétrica.

III. B comuta com qualquer matriz antissimétrica.

IV. $\det(AB) = 0$.

É(são) VERDADEIRAS(S):

a) nenhuma.

b) apenas I.

c) apenas III.

d) apenas IV.

e) apenas II e IV.

Comentários

I. Falsa.

Note que

$$(A + B)^2 = (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$$



Para termos a identidade da afirmação, devemos provar que $AB = BA$. Como A é simétrica e B é antissimétrica, ambos de ordem ímpar, podemos supor as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nesse caso, temos:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Temos $AB \neq BA$, logo encontramos um contraexemplo que torna a afirmação falsa.

II. Falsa.

Sejam A e C duas matrizes simétricas. Vamos mostrar por um contraexemplo que $AC \neq CA$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Temos

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } CA = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Logo $AC \neq CA$.

III. Falsa.

Sejam B e D duas matrizes antissimétricas. Vamos mostrar por um contraexemplo que $BD \neq DB$.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Temos

$$BD = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ e } DB = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Logo $BD \neq DB$.

IV. Verdadeira.

Como B é antissimétrica, temos $B^T = -B$. Aplicando o determinante:



$$\det B^T = -\det B \Rightarrow \det B = -\det B \Rightarrow 2 \det B = 0 \therefore \det B = 0$$

Assim, temos $\det(AB) = \det A \det B = \det A \cdot 0 = 0$.

Gabarito: D

42. (ITA/2021)

Seja $S \subset \mathbb{R}$ o conjunto solução da inequação $(x^2 + x + 1)^{2x^2 - x - 1} \leq 1$. Podemos afirmar que:

a) $S = [-1, 1]$.

b) $S = \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$.

c) $S = [0, 1]$.

d) $S = \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup [0, 1]$.

e) S é o conjunto vazio.

Comentários

Vamos dividir em casos.

I) $x^2 + x + 1 = 1$

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -1$$

Nesse caso, teremos $1^{2x^2 - x - 1} = 1 \leq 1$. Ou seja, $S_1 = \{-1; 0\}$.

II) $x^2 + x + 1 > 1$

$$x^2 + x > 0 \Rightarrow x(x + 1) > 0 \Rightarrow x < -1 \text{ ou } x > 0$$

Para esses valores, temos:

$$2x^2 - x - 1 \leq 0$$

Temos como raízes:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = 1 \text{ ou } -\frac{1}{2}$$

Assim, a inequação fica:

$$2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

Fazendo a interseção com a condição inicial:

$$S_2 =]0; 1]$$



$$\text{III) } x^2 + x + 1 < 1$$

$$x(x + 1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

Nesse caso, temos:

$$2x^2 - x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{2} \text{ ou } x \geq 1$$

Fazendo a interseção com a condição inicial:

$$S_3 =] -1; -1/2]$$

Fazendo a união de todas as soluções, encontramos:

$$S = \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup [0; 1]$$

Gabarito: D

43. (ITA/2021)

Os vértices da base de um triângulo isósceles PQR , inscrito numa circunferência de centro $O = (5, 0)$, são $P = (4, 2\sqrt{2})$ e $Q = (8, 0)$. Se o vértice R pertence ao primeiro quadrante, então a área do triângulo PQR é igual a:

- a) $\sqrt{2}(3 - \sqrt{3})$.
- b) $\sqrt{3}(3 + \sqrt{3})$.
- c) $\sqrt{3}(3 - \sqrt{3})$.
- d) $\sqrt{6}(3 + \sqrt{3})$.
- e) $\sqrt{6}(3 - \sqrt{3})$.

Comentários

Como o triângulo é isósceles de base PQ , temos que o raio da circunferência que circunscreve PQR será igual a distância de O até P ou Q , logo:

$$R = d_{OQ} = \sqrt{(8 - 5)^2} = 3$$

Assim, a equação da circunferência é dada por:

$$\lambda: (x - 5)^2 + y^2 = 9$$

O vértice R passa por essa circunferência e também passa pela reta mediatriz do segmento PQ . Vamos calcular o coeficiente angular dessa reta e depois determiná-la usando o centro da circunferência (essa reta também passa pelo centro da circunferência):



$$m_{PQ} = \frac{2\sqrt{2}}{4-8} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$m_{PQ} \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_s = \sqrt{2}$$

Assim, a reta s que contém R é dada por:

$$s: y = \sqrt{2}(x - 5)$$

Para encontrar R , devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt{2}(x - 5) \\ (x - 5)^2 + y^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow (x - 5)^2 + [\sqrt{2}(x - 5)]^2 = 9 \Rightarrow 3 \cdot (x - 5)^2 = 9$$

$$\Rightarrow (x - 5) = \pm\sqrt{3} \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{3}$$

Como R é um ponto do primeiro quadrante, devemos usar $x = 5 + \sqrt{3}$:

$$y = \sqrt{2}(5 + \sqrt{3} - 5) = \sqrt{6} \therefore R = (5 + \sqrt{3}, \sqrt{6})$$

A área do triângulo é dada por:

$$[PQR] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 4 & 2\sqrt{2} \\ 5 + \sqrt{3} & \sqrt{6} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |16\sqrt{2} + 4\sqrt{6} - 10\sqrt{2} - 2\sqrt{6} - 8\sqrt{6}|$$

$$[PQR] = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = \sqrt{6}(3 - \sqrt{3})$$

Gabarito: E

44. (ITA/2021)

Considere a curva plana definida pela equação $9x^2 + 4y^2 + 36x + 24y + 36 = 0$. O ponto $P = (0, 0)$ é vértice de um retângulo circunscrito à curva. Então a equação da circunferência circunscrita ao retângulo é:

- a) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$.
- b) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$.
- c) $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 13$.
- d) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$.
- e) $(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 13$.

Comentários

Vamos reescrever a equação da curva, completando os quadrados:

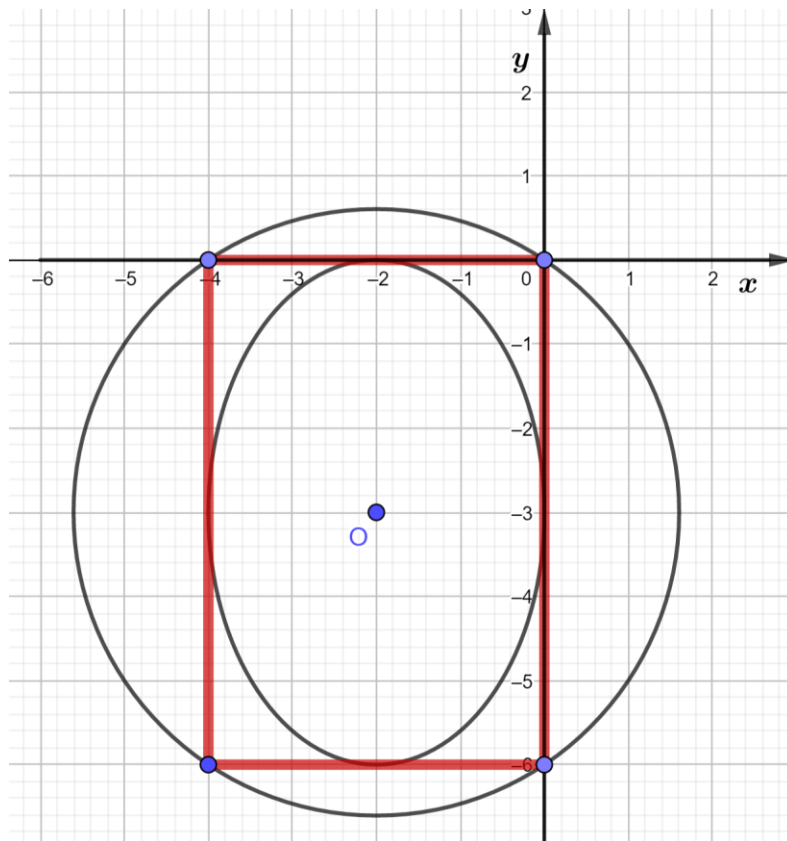


$$9(x^2 + 4x + 4) + 4(y^2 + 6y + 9) - 36 = 0$$

$$9(x + 2)^2 + 4(y + 3)^2 = 36$$

$$\frac{(x + 2)^2}{4} + \frac{(y + 3)^2}{9} = 1$$

Portanto, temos uma elipse com eixo maior na vertical e centro $O(-2, -3)$ conforme a figura abaixo:



Como o ponto $P(0, 0)$ é um vértice do retângulo, temos que o raio da circunferência é dado por:

$$R = OP = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

O centro $O(-2, -3)$ também será o centro da circunferência circunscrita ao retângulo, logo sua equação é dada por:

$$(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$$

Gabarito: D

45. (ITA/2021)

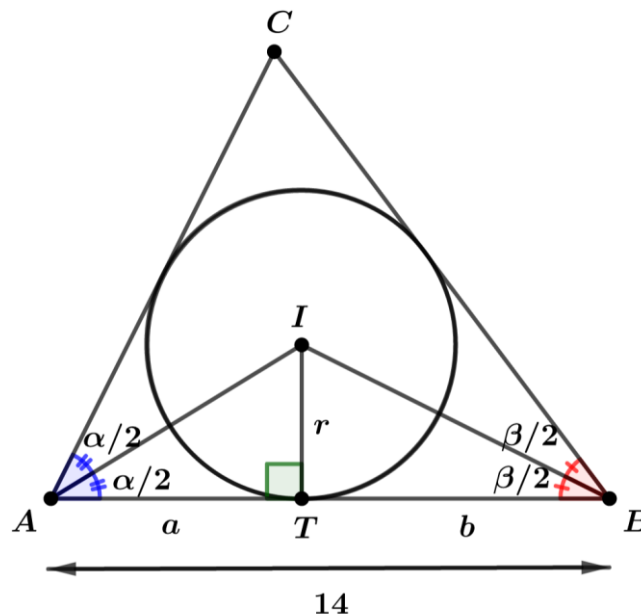
Considere um triângulo ABC tal que $m(\widehat{AB}) = 14$, $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{3}{5}$ e $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{5}{13}$. Então, o raio da circunferência inscrita ao triângulo é igual a:



- a) 2.
- b) $2\sqrt{2}$.
- c) 3.
- d) 4.
- e) $4\sqrt{2}$.

Comentários

Temos a seguinte figura:



Note que I é o centro da circunferência inscrita, ele é o incentro que é o ponto de encontro das bissetrizes internas. Do enunciado, temos:

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos \beta = \frac{5}{13} \Rightarrow \operatorname{sen} \beta = \frac{12}{13}$$

Da figura, temos:

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = \frac{r}{a} \Rightarrow a = \frac{r}{\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} \right)}$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right) = \frac{r}{b} \Rightarrow b = \frac{r}{\operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} \right)}$$



Assim, temos:

$$a + b = \frac{r}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{r}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right)} = 14 \Rightarrow r = \frac{14}{\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right)}\right)}$$

Para calcular as tangentes, podemos usar a seguinte identidade:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{\frac{4}{5}}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\beta}{1 + \cos\beta} = \frac{\frac{12}{13}}{1 + \frac{5}{13}} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Substituindo na expressão de r :

$$r = \frac{14}{\left(2 + \frac{3}{2}\right)} = \frac{14}{\frac{7}{2}} = 4$$

Gabarito: D

46. (ITA/2021)

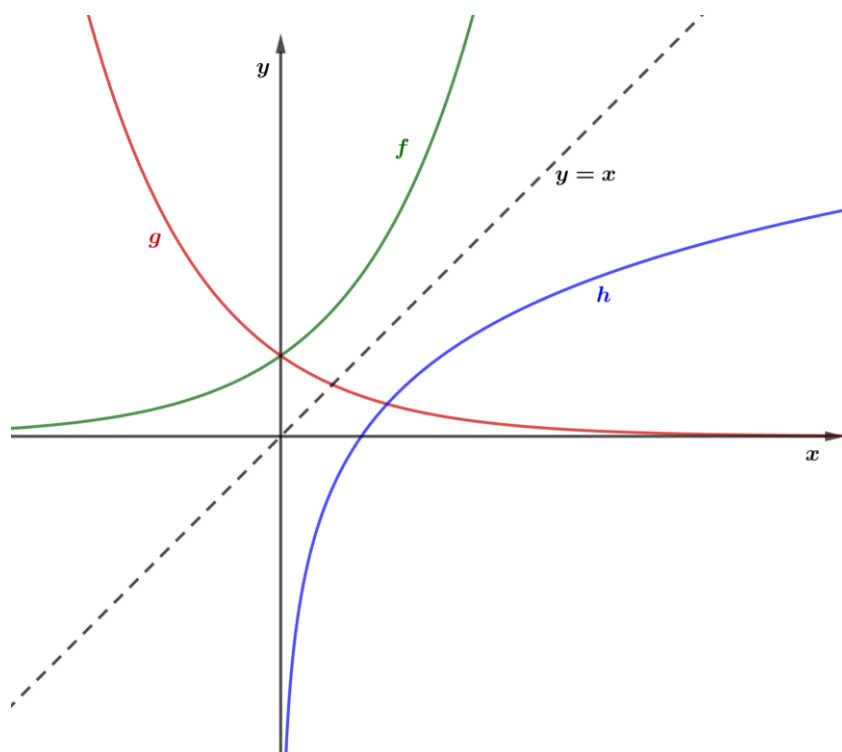
Seja S o subconjunto do plano cartesiano constituído pela união dos gráficos das funções $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{-x}$ e $h(x) = \log_2 x$, com $x > 0$. Para cada $k > 0$ seja n o número de interseções da reta $y = kx$ com S . Podemos afirmar que:

- a) $n \neq 1$ para todo $k > 0$.
- b) $n = 2$ para pelo menos três valores distintos de k .
- c) $n = 2$ para exatamente dois valores distintos de k .
- d) $n \neq 3$ para todo $k > 0$.
- e) O conjunto dos $k > 0$ para os quais $n = 3$ é a união de dois intervalos disjuntos.

Comentários

Esboçando os gráficos, obtemos:

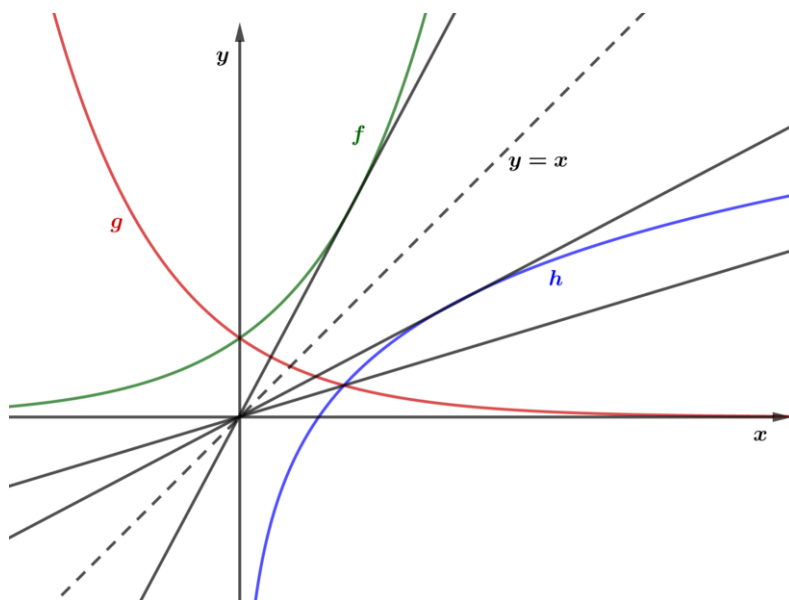




Analisando as alternativas:

a) Falsa, pois para $k = 1$, temos 1 interseção com a função g .

b) Verdadeira. Temos 2 interseções nos seguintes casos:



As interseções são 1) g e tangente a f , 2) g e tangente a h e 3) ponto comum de g e h , e interseção com h .

c) Falsa.

Explicação na letra (b).



d) Falsa.

Temos 3 interseções para 3 intervalos:

1) intervalo entre o eixo y e o ponto de tangencia com f.

2) intervalo entre o ponto de tangencia com h até o ponto comum entre g e h.

3) intervalo entre o ponto comum de g e h até o eixo x.

e) Falsa.

Explicação na letra (d).

Gabarito: B

47. (ITA/2021)

A única solução real da equação

$$7^x = 59^{x-1}$$

pertence ao intervalo:

a) $\left(0, \frac{2}{5}\right]$.

b) $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{3}\right]$.

c) $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{2}\right]$.

d) $\left(\frac{5}{2}, \frac{10}{3}\right]$.

e) $\left(\frac{10}{3}, 4\right]$.

Comentários

Da equação, temos:

$$7^x = \frac{59^x}{59} \Rightarrow \left(\frac{59}{7}\right)^x = 59$$

Para encontrarmos a resposta, devemos verificar os valores das alternativas. Veja que

$$\frac{59}{7} \cong 8,4$$

Note que $8,4^2 = 70,56$, logo:

$$\left(\frac{59}{7}\right)^x = 59 < \left(\frac{59}{7}\right)^2 \cong 8,4^2 = 70,56$$

Podemos afirmar que $x < 2$.



Para $x = 4/3$, teríamos:

$$\left(\frac{59}{7}\right)^{\frac{4}{3}} = \frac{59}{7} \cdot \left(\frac{59}{7}\right)^{\frac{1}{3}} > 8,5 \cdot (8,5)^{\frac{1}{3}} > 8,5 \cdot (2^3)^{\frac{1}{3}} = 8,5 \cdot 2 = 17$$

Assim, veja que

$$17 < \left(\frac{59}{7}\right)^{\frac{4}{3}} < \left(\frac{59}{7}\right)^x < \left(\frac{59}{7}\right)^2 < \left(\frac{59}{7}\right)^{\frac{5}{2}}$$

Gabarito: C

48. (ITA/2021)

Seja A uma matriz real quadrada de ordem 2 tal que

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ y+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Então, o traço da matriz A é igual a:

- a) 0.
- b) 1.
- c) 2.
- d) 3.
- e) 4.

Comentários

Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Queremos o valor de $\text{tr}A = a + d$. Assim, temos das equações matriciais:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+3b & 2a+4b \\ c+3d & 2c+4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+3b = 1 & (I) \\ 2a+4b = x & (II) \\ c+3d = y & (III) \\ 2c+4d = 0 & (IV) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ y+1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+4b & 3a+5b \\ 2c+4d & 3c+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ y+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a+4b = x & (V) \\ 3a+5b = 3 & (VI) \\ 2c+4d = y+1 & (VII) \\ 3c+5d = 1 & (VIII) \end{cases}$$

De IV e VII, temos:



$$2c + 4d = 0 = y + 1 \therefore y = -1$$

Fazendo $2 \cdot (III) - (IV)$, obtemos:

$$2d = 2y \Rightarrow d = -1$$

Fazendo $3 \cdot (VI) - 5 \cdot (I)$, obtemos:

$$4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

Portanto, $\text{tr}A = a + d = 1 - 1 = 0$.

Gabarito: A

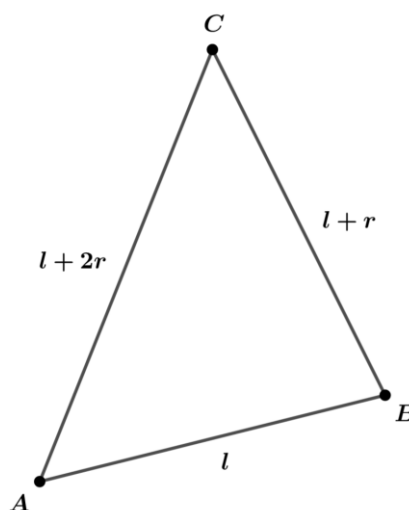
49. (ITA/2021)

O número de triângulos, dois a dois não congruentes, de perímetro 87, cujos lados, dispostos em ordem crescente de comprimento, são números inteiros em progressão aritmética de razão não nula, é igual a:

- a) 12.
- b) 14.
- c) 16.
- d) 18.
- e) 20.

Comentários

Do enunciado, temos:



Temos uma progressão aritmética com $r > 0$. O perímetro é igual a 87, logo:

$$3l + 3r = 87 \Rightarrow l + r = 29 \quad (I)$$



Verificando a condição de existência do triângulo, obtemos:

$$(l + 2r) - (l + r) < l < (l + 2r) + (l + r)$$

$$(i) \ r < l < 2l + 3r$$

$$(l + 2r) - l < l + r < (l + 2r) + l$$

$$(ii) \ r < l < 2l + r$$

$$(l + r) - l < l + 2r < (l + r) + l$$

$$(iii) \ -r < l < 2l - r$$

Assim, temos como condição:

$$r < l < 2l - r$$

Usando (I) na desigualdade acima:

$$l = 29 - r \Rightarrow r < 29 - r < 2(29 - r) - r$$

Note que a desigualdade se resume a

$$2r < 29 \Rightarrow r < \frac{29}{2} = 14,5$$

Como os termos são números inteiros, temos que r é inteiro e não nulo, logo:

$$r \in \{1, 2, 3, \dots, 14\}$$

Temos 14 triângulos possíveis.

Gabarito: B

50. (ITA/2021)

Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo com diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$. Considere as afirmações:

- I. Se as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ têm mesmo comprimento e se intersectam ortogonalmente, então $ABCD$ é um losango.
- II. Se as diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ dividem o quadrilátero $ABCD$ em quatro triângulos de mesma área, então $ABCD$ é um paralelogramo.
- III. Se o ponto de interseção das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ é o centro do círculo que circunscreve o quadrilátero $ABCD$, então $ABCD$ é um retângulo.

É(são) VERDADEIRAS(S):

- a) apenas I.

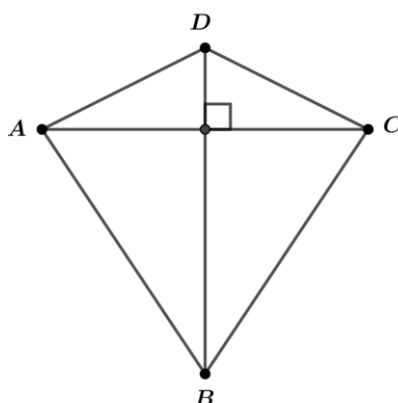


- b) apenas II.
- c) apenas III.
- d) apenas I e II.
- e) apenas II e III.

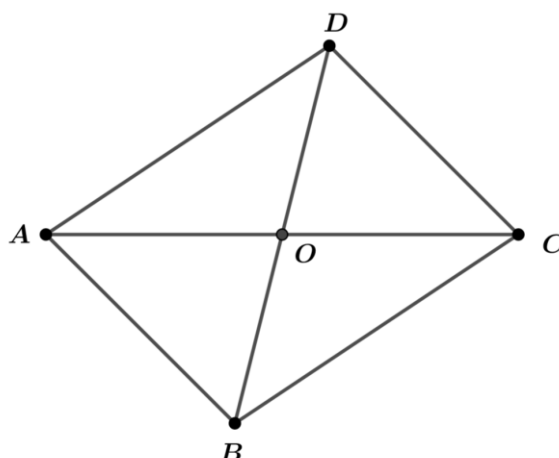
Comentários

I. Falsa.

Podemos ter o seguinte quadrilátero que não é losango:



II. Verdadeira.



Como os triângulos tem mesma área, temos $[AOD] = [AOB] = [BOC] = [COD]$.

Assim, analisando $[AOD] = [COD]$, percebemos que ambos os triângulos tem mesma altura em relação às bases AO e OC . Logo, $AO = OC$.

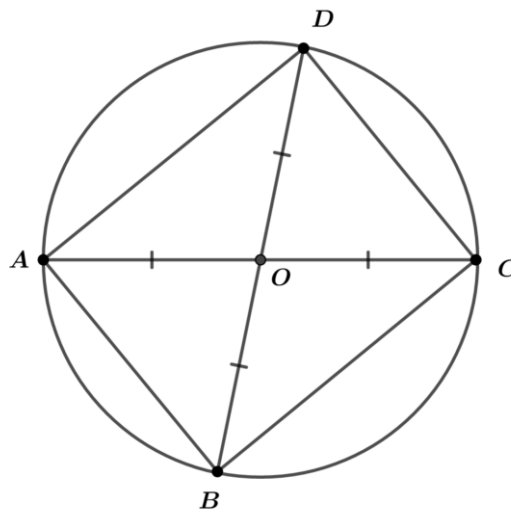
Da mesma forma, analisando $[AOD] = [AOB]$, vemos que os triângulos tem mesma altura em relação às bases OD e OB . Portanto, $OD = OB$.



Concluimos que O é ponto médio das diagonais AC e BD . Pelo critério de congruência LAL , temos $AOD \equiv BOC \Rightarrow AD = BC$ e $AOB \equiv COD \Rightarrow AB = CD$. Além disso temos uma relação de paralelismo com os lados opostos do quadrilátero, ou seja, $ABCD$ é paralelogramo.

III. Verdadeira.

Se a interseção das diagonais é o centro O do círculo que circunscreve $ABCD$, temos que ela vai ser equidistante dos vértices, logo:



O é ponto médio de duas diagonais congruentes, logo, temos um retângulo.

Gabarito: E

51. (ITA/2021)

Considere as seguintes afirmações:

- I. Se a medida do ângulo agudo entre uma reta r e um plano α é 45° , então existe uma reta s contida em α tal que a medida do ângulo agudo entre r e s é 30° .
- II. Se uma reta r é perpendicular a duas retas distintas s e t contidas em um plano α , então r é perpendicular a α .
- III. Sejam r , s e t as três retas distintas determinadas por três pontos não colineares. Então, existe um único ponto equidistante de r , s e t .
- IV. Se P e Q são pontos à mesma distância de um plano α , então o ponto médio do segmento $\overline{PQ}$ pertence a α .

É(são) VERDADEIRAS(S):

- a) nenhuma.
- b) apenas I e II.
- c) apenas I e III.



d) apenas III e IV.

e) apenas II, III e IV.

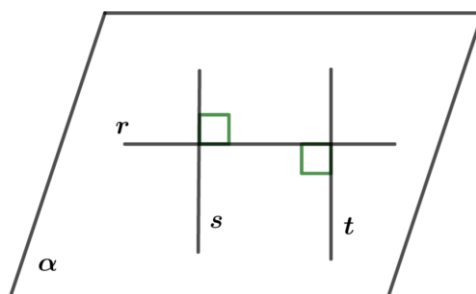
Comentários

I. Falsa.

A menor medida do ângulo entre a reta r e o plano α é 45° , ou seja, é impossível obter uma reta de α que possua um ângulo menor que 45° com r .

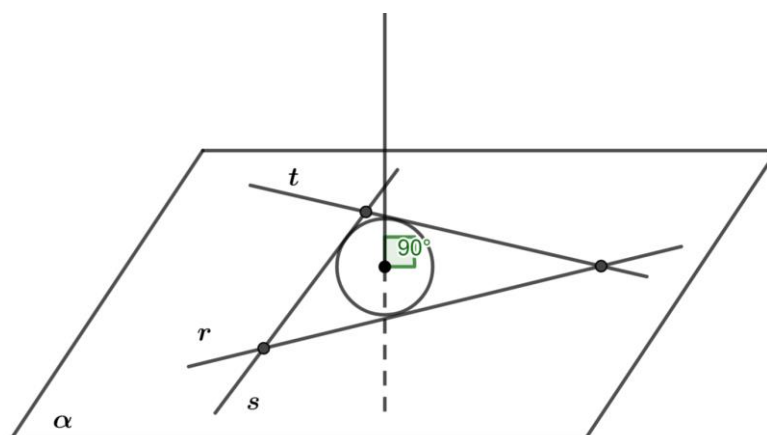
II. Falsa.

A reta r pode ser perpendicular a duas retas paralelas s e t contidas em α . Assim, r estará contida em α .



III. Falsa.

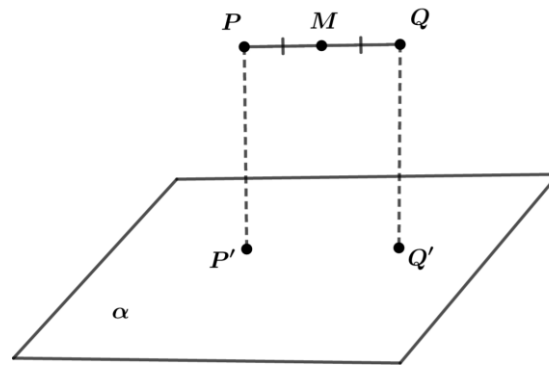
Podemos traçar uma reta perpendicular ao plano α e que passa pelo incentro dos três pontos do plano. Assim, teremos infinitos pontos equidistantes das retas.



IV. Falsa.

P e Q podem ser pontos fora de α que equidistam desse plano. O ponto médio de PQ , nesse caso, não estará contido em α .





Gabarito: A

52. (ITA/2021)

Um dodecaedro regular tem 12 faces que são pentágonos regulares. Escolhendo-se 2 vértices distintos desse dodecaedro, a probabilidade de eles pertencerem a uma mesma aresta é igual a:

- a) $\frac{15}{100}$.
- b) $\frac{3}{19}$.
- c) $\frac{15}{190}$.
- d) $\frac{5}{12}$.
- e) $\frac{2}{5}$.

Comentários

Vamos calcular o número de arestas e vértices do dodecaedro regular:

$$2A = 5F_5 = 5 \cdot 12 \Rightarrow A = 30$$

Usando a relação de Euler:

$$V - A + F = 2 \Rightarrow V - 30 + 12 = 2 \Rightarrow V = 20$$

A probabilidade será igual ao número de casos favoráveis n_f sobre o número de casos possíveis n_T . O número de casos possíveis é dado pelos diferentes modos de escolher 2 vértices dentre os 20 disponíveis:

$$n_T = \binom{20}{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$$

O número de casos favoráveis é igual ao número de arestas do poliedro, pois queremos que os 2 pontos sejam da mesma aresta:

$$n_f = 30$$



Portanto:

$$p = \frac{n_f}{n_T} = \frac{30}{190} = \frac{3}{19}$$

Gabarito: B

53. (ITA/2021)

Pretende-se distribuir 48 balas em 4 tigelas designadas pelas letras A , B , C e D . De quantas maneiras pode-se fazer essa distribuição de forma que todas as tigelas contenham ao menos 3 balas e a tigela B contenha a mesma quantidade que a tigela D .

- a) 190
- b) 361
- c) 722
- d) 1083
- e) 1444

Comentários

Sejam a, b, c e d o número de balas nas tigelas A, B, C e D , respectivamente. Do enunciado, podemos escrever a seguinte equação:

$$a + b + c + d = 48$$

Com a condição de que:

$$\begin{cases} a \geq 3 \\ b \geq 3 \\ c \geq 3 \\ d \geq 3 \\ b = d \end{cases}$$

Fazendo uma mudança de variável $x = a - 3, y = b - 3, z = c - 3$ e $w = d - 3$, obtemos:

$$x + y + z + w = 36$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \\ w \geq 0 \\ y = w \end{cases}$$

Note que o problema se assemelha a encontrar o número de soluções inteiras não negativas de uma equação. A única diferença é a restrição $y = w$. Vamos tomar a equação e incluir a restrição $y = w$. Assim, obtemos:



$$x + 2y + z = 36$$

$$x + z = 36 - 2y$$

Construindo a tabela e analisando as possibilidades:

$y = w$	$x + z$	Número de casos
0	36	$P_{36+1}^{36,1} = 37$
1	34	$P_{34+1}^{34,1} = 35$
2	32	$P_{32+1}^{32,1} = 33$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
18	0	$P_{0+1}^{0,1} = 1$

Somando os casos, obtemos:

$$N = 37 + 35 + 33 + \dots + 1$$

Essa é a soma de uma progressão aritmética de razão 2 com 19 termos, logo:

$$N = (1 + 37) \cdot \frac{19}{2} = 19^2 = 361$$

Gabarito: B

54. (ITA/2021)

Seja $z \in \mathbb{C}$. Se a representação dos números 4 , $z + 2$ e z^2 no plano complexo são vértices de um triângulo equilátero, então o comprimento do seu lado é igual a:

- a) 3
- b) $\sqrt{10}$
- c) $\sqrt{11}$
- d) $2\sqrt{3}$
- e) $\sqrt{13}$

Comentários



Como os complexos são vértices de um triângulo equilátero, podemos escrever:

$$|z^2 - 4| = |z^2 - (z + 2)| = |z + 2 - 4| = L$$

$$|z^2 - 4| = |z^2 - z - 2| = |z - 2| = L$$

$$|(z - 2)(z + 2)| = |(z - 2)(z + 1)| = |z - 2|$$

Assim, temos:

$$\begin{cases} |z - 2||z + 2| = |z - 2| \\ |z - 2||z + 1| = |z - 2| \end{cases}$$

Como $|z - 2|$ é a medida do lado do triângulo, temos que $|z - 2| \neq 0$, logo:

$$\begin{cases} |z + 2| = 1 \\ |z + 1| = 1 \end{cases}$$

Fazendo $z = a + bi$, encontramos duas equações de circunferência:

$$\begin{cases} (a + 2)^2 + b^2 = 1 \quad (I) \\ (a + 1)^2 + b^2 = 1 \quad (II) \end{cases}$$

Fazendo $(I) - (II)$:

$$(a + 2)^2 - (a + 1)^2 = 0 \Rightarrow (a + 2 + a + 1)(a + 2 - a - 1) = 0$$

$$2a + 3 = 0 \therefore a = -\frac{3}{2}$$

Substituindo esse valor em (II) :

$$\left(-\frac{3}{2} + 1\right)^2 + b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \therefore b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, o complexo z é dado por:

$$z = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Podemos escolher qualquer um dos valores para calcular o lado. Vamos escolher $z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$L = |z - 2| = \left| -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 2 \right| = \left| -\frac{7}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right| = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{13}$$

Gabarito: E

55. (ITA/2021)



Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros tal que $p(51) = 391$ e $0 \leq p(3) < 12$. Então, $p(3)$ é igual a:

- a) 5
- b) 6
- c) 7
- d) 8
- e) 9

Comentários

Seja $A(x) = p(x) - 391$. Assim, temos:

$$A(51) = p(51) - 391 = 391 - 391 = 0$$

Podemos afirmar que $x = 51$ é raiz de A , logo:

$$A(x) = (x - 51)B(x)$$

Substituindo A :

$$p(x) - 391 = (x - 51)B(x) \Rightarrow p(x) = (x - 51)B(x) + 391$$

Para $x = 3$:

$$p(3) = -48 \cdot B(3) + 391$$

Usando a desigualdade:

$$0 \leq p(3) < 12$$

$$0 \leq -48 \cdot B(3) + 391 < 12$$

$$-391 \leq -48 \cdot B(3) < -379$$

Note que como o polinômio p possui apenas coeficientes inteiros, temos que B também terá apenas coeficiente inteiros. Portanto, $B(3)$ é inteiro. O único valor inteiro que satisfaz a desigualdade acima é $B(3) = 8$. Logo:

$$p(3) = -48 \cdot 8 + 391 = -384 + 391 = 7$$

Gabarito: C

